MATERIAL CREADO PARA EL CONVERSATORIO “EL PAPEL DEL DOCENTE DE MATEMÁTICA EN EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO CRÍTICO”

Mtro. Jorge Ernesto Lemus Flores

RESUMEN

El siguiente material son los apuntes que sirvieron de preparación para el conversatorio “El papel del docente de matemáticas en el desarrollo del pensamiento crítico” organizado por AMATES. El objetivo del conversatorio era compartir el papel del docente en el aprendizaje de las demostraciones matemáticas y cómo estas ayudan al desarrollo del pensamiento crítico de los estudiantes. Se explica mediante cuatro puntos:

En el primero se muestran las definiciones de pensamiento crítico y demostraciones.

En el segundo punto se muestra un ejemplo de la solución de un problema que requiere demostración, esto para mostrar uno de los formatos usados para realizar pruebas.

En el tercer punto se da un ejemplo de una conjetura que resultó cierta y pasó a ser teorema (Conjetura de Fermat), una conjetura que no se ha refutado ni demostrado (Conjetura Goldbach) y una conjetura falsa dando como ejemplo la Conjetura de Pólya. Estos ejemplos tienen el objetivo de hacer la distinción entre demostración, conjeturas y contraejemplos.

En el cuarto punto se explica cómo el proceso de realizar una demostración ayuda al desarrollo del pensamiento crítico, ya que las demostraciones no son simples ejercicios formales, más bien son problemas que sirven de herramienta para desarrollar habilidades como: argumentación, abstracción, análisis, evaluación e interpretación.

En el último punto se discute la necesidad de formar a los maestros en hacer demostraciones. Comprendiendo que las demostraciones son casi la etapa final del desarrollo del aprendizaje en matemáticas y aceptando su complejidad, muchos estudiantes del profesorado de matemáticas carecen de las habilidades necesarias para realizarlas. Los docentes deben buscar métodos adecuados para crear una cultura de resolución de problemas, y los estudiantes deben adquirir habilidades y desarrollar mejores métodos de estudio.

Las notas terminan con una reflexión sobre el pensamiento crítico y cómo su desarrollo no debe limitarse únicamente a las materias de matemáticas. Su desarrollo es fundamental para la sociedad, fomentando individuos que no acepten todo pasivamente, sino que cuestionen y analicen afirmaciones antes de tomar decisiones. En una era donde nos bombardean con información de todos lados, tener un pensamiento independiente y crítico es más importante que nunca.

DEFINICIONES

Pensamiento critico

Es el pensamiento claro y racional que permite realizar juicios confiables sobre la credibilidad de una afirmación o la conveniencia de una acción. Es un proceso mental disciplinado que utiliza estrategias de razonamiento para evaluar argumentos (Arenas, 2007).

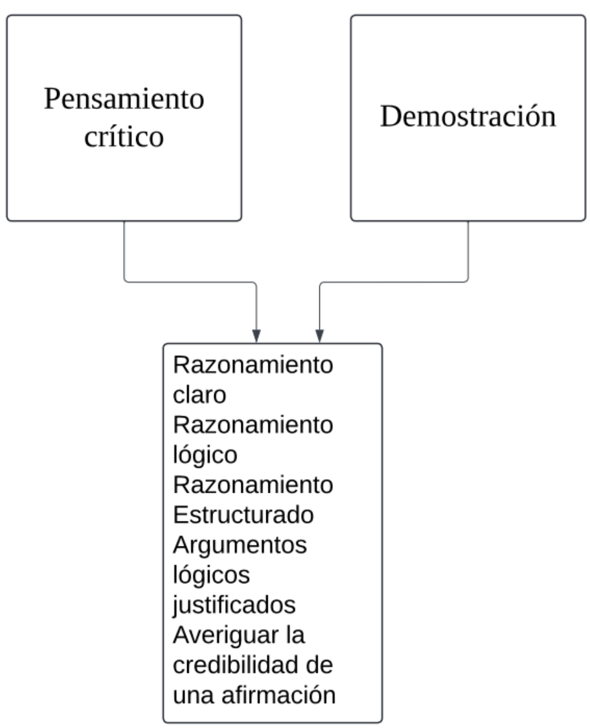
Podemos decir que el pensamiento critico es una habilidad esencial que nos permite hacer juicios confiables sobre la credibilidad de una afirmación y la conveniencia de una acción. Nos facilita tomar decisiones fundamentadas, nos da también estrategias de razonamiento para evaluar argumentos; como identificar premisas y conclusiones, el pensamiento critico nos permite distinguir la verdad y ayuda al desarrollo personal y profesional.

Demostración matemática

Es el razonamiento que deduce la verdad de una proposición a partir de suposiciones verdaderas o resultados previos. La demostración de un teorema es un argumento lógico válido cuyas premisas son las hipótesis del teorema y cuya conclusión es la afirmación que se desea probar.

Figura 1

Esquema relación de pensamiento crítico y las demostraciones



Es decir, las demostraciones son una serie de pasos estructurados de argumentos lógicos que explican porque algo es verdadero, durante las demostraciones se presentan pruebas o evidencias que validen la veracidad de una afirmación

Al leer estas dos definiciones se puede decir que el pensamiento crítico y las demostraciones están relacionados, porque ambos implican un proceso de razonamiento claro, lógico, estructurado en los cuales construimos argumentos lógicos, justificados y basados en premisas válidas para averiguar la veracidad de una afirmación. Esta relación se resume en la figura 1.

DEMOSTRACIÓN, CONJETURA QUE PASO A SER TEOREMA, CONJETURA Y CONJETURA FALSA.

Ejemplo de la solución de un problema que requiere una demostración

Vamos a ejemplificar un problema a modo de mostrar uno de los formatos que se usan para hacer demostraciones en matemática.

Comencemos recordando el teorema de Pitágoras el cual dice:

Si en un triángulo rectángulo hay catetos de longitud a y b, y la medida de su hipotenusa es c, entonces se cumple la siguiente relación:

$$\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$$

Es importante antes conocer las definiciones de hipótesis y tesis. Una hipótesis es una proposición de la que generalmente se parte o se usa durante la demostración para comprobar la veracidad de una tesis y la tesis es la afirmación o proposición que se desea probar.

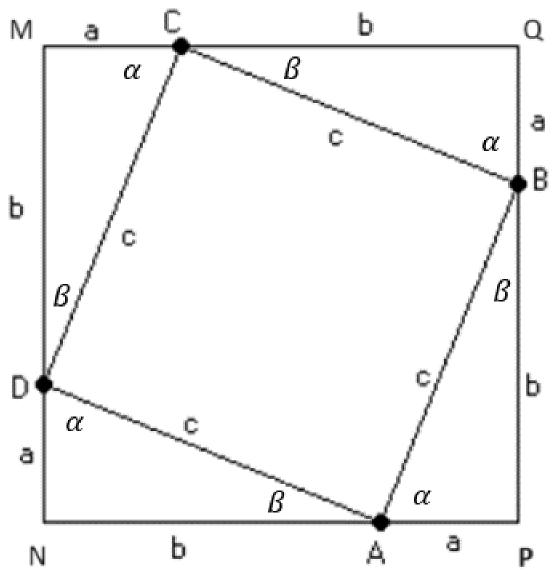
En el teorema de Pitágoras se puede identificar la siguiente hipótesis y tesis.

Tesis: $a^2 + b^2 = c^2$

Hipótesis: Triangulo rectángulo con catetos $a\ y\ b$ e hipotenusa c

Problema:

Con la siguiente construcción demostrar el teorema de Pitágoras en donde NMPQ es un cuadrado de lados $a + b$



Obsérvese que se ha partido de un cuadrado de lado $(a + b)$ compuesto por 4 triángulos rectángulos congruentes (de lados de longitud $a\ y\ b$) y un cuadrilátero que resulta ser un cuadrado. Por tener sus cuatros lados iguales (hipotenusas iguales) y ángulos de 90°.

Vamos a demostrar que $a^2 + b^2 = c^2$, independientemente de los valores $a, b\ y\ c$

Tabla 1

Tabla de afirmaciones y justificaciones

Afirmaciones	**Justificaciones**
$(MNPQ) = (a + b)^2$	Área de un cuadrado
$(CMD) = (DNA) = (APB) = (BQC) = \frac{1}{2}ab$	Área de un triángulo
$(ABCD) = c^2$	Área de un cuadrado
$(MNPQ) = (a + b)^2 = 4\left(\frac{ab}{2}\right) + c^2$	Propiedad de suma de áreas
$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$	Simplificación y desarrollo del binomio
$a^2 + 2ab + b^2 - 2ab = 2ab + c^2 - 2ab$	Propiedad de las ecuaciones
$a^2 + b^2 = c^2$	Lqqd

En este formato se usan dos columnas, en una columna, escribimos cada afirmación paso a paso, y en la otra columna, justificamos cada afirmación. Como se muestra en la tabla 1. Cada paso se construye sobre el anterior hasta llegar a la demostración completa del teorema de Pitágoras. Este enfoque nos ayuda a comprender la demostración, También a desarrollar un pensamiento matemático estructurado y crítico.

El ejemplo muestra el método de demostración directa. Hay otros métodos de demostración como las indirectas, inducción entre otras. Es importante elegir el mejor camino y comprender que un problema no solo puede tener una única solución.

Conjetura de Fermat (último teorema de Fermat) que paso a ser teorema

Pierre de Fermat, inspirado por relaciones matemáticas como el Teorema de Pitágoras, se preguntó qué sucedería si se consideraban potencias mayores que dos en la fórmula $a^2 + b^2 = c^2$ con $a, b\ y\ c$ como números enteros positivos. Comenzó a probar con diferentes números enteros en la ecuación $a^3 + b^3 = c^3$ y para otras potencias mayores, sin lograr satisfacer la igualdad. Esta exploración lo llevó a formular su famosa conjetura, conocida como el *Último Teorema de Fermat*, que establece que no existen tres números enteros positivos $a, b\ y\ c$ que puedan satisfacer la ecuación $a^n + b^n = c^n$, para cualquier entero $n > 2$

Durante más de 350 años, el teorema permaneció sin demostración, convirtiéndose en una de las conjeturas más famosas de la matemática. Muchos matemáticos a lo largo de los siglos intentaron demostrar el teorema sin éxito. Los intentos fallidos y los métodos parciales contribuyeron al desarrollo de varias ramas de la matemática.

El esfuerzo por demostrar el Último Teorema de Fermat ejemplifica cómo una conjetura puede tener un impacto profundo y duradero en el desarrollo de la matemática. La búsqueda de una demostración no solo resuelve una pregunta específica, sino que también expande el conocimiento matemático, introduciendo nuevas ideas, técnicas y conexiones entre diferentes áreas.

Conjetura Goldbach

La Conjetura de Goldbach, propuesta por Christian Goldbach en 1742, afirma que todo número par mayor que 2 puede ser expresado como la suma de dos números primos. Aunque ha sido verificada para números muy grandes mediante el uso de computadoras, aún no se ha demostrado de manera general. Esta conjetura es uno de los problemas no resueltos más difíciles de la teoría de números y ha capturado el interés de los matemáticos durante siglos.

Ejemplos:

$4 = 2 + 2$

$6 = 3 + 3$

$10 = 7 + 3$

$100 = 3 + 997$

$1000000 = 17 + 999983$

Conjetura de Pólya

Plantea que la mayoría de los números naturales (más del 50% de ellos) menores que cualquier número dado n, tienen una cantidad impar de factores primos.

Ejemplo: Tomemos a $n = 10$

$10 = 5^2$ par

$9 = 3^2$ par

$8 = 2^3$ impar

$7 = 7$ impar

$6 = 3 * 2$ par

$5 = 5$ impar

$4 = 2^2$ par

$3 = 3$ impar

$2 = 2$ impar

$1 = 1$ impar

$Tota\ impares\ =\ 6$

$Total\ de\ pares =\ 4$

Para $n\ =\ 10$ la conjetura es cierta y así podemos probar para 11, 12 13, 15 hasta 1000 o 10000 o más

Durante décadas, esta conjetura fue considerada como una afirmación que parecía intuitivamente correcta. Sin embargo, en 1958, C. B. Haselgrove demostró que la Conjetura de Pólya es falsa. Mostró que existen contraejemplos para valores muy grandes de n, donde la cantidad de números con un número par de factores distintos de 1 supera a los que tienen un número impar de tales factores.

Es decir, se encontró un número n en el cual no se cumple la conjetura y con eso se demostró que la afirmación era falsa. Esto nos ayuda a definir el contra ejemplo, el contraejemplo es una instancia en la cual no es verdadera la conjetura o afirmación, solo con esa instancia se demuestra la falsedad de una afirmación.

Figura 2

Resumen de demostración, conjetura y contraejemplos.

Con los ejemplos anteriores, podemos hacer claras distinciones entre demostraciones, conjeturas y contraejemplos en matemáticas como se resume en la figura 2. Las demostraciones son verificaciones formales de afirmaciones matemáticas, como lo ejemplifica la demostración del Teorema de Pitágoras. Por otro lado, las conjeturas son hipótesis aún no probadas, Finalmente, un contraejemplo es una instancia que demuestra que una conjetura o afirmación es falsa.

EL PAPEL QUE TIENE LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA EN EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO CRÍTICO

Al comenzar a realizar una demostración, lo primero que se hace es comprender la proposición. Para eso, usamos distintas estrategias y nos preguntamos: ¿qué me están pidiendo demostrar?, ¿a qué debo llegar para demostrar la proposición? Hacemos pruebas con casos puntuales, analizamos la estructura de la proposición (si es del tipo "p implica q" o tiene otra estructura) y, a partir de eso, determinamos cuál es el mejor camino para llegar a la demostración. Sacamos datos de lo que tenemos en el teorema, etcétera. Luego de elegir el camino a seguir, se van dando argumentos lógicos justificados. En cada paso que damos en una demostración, nos hacemos preguntas sobre la veracidad de lo que estamos afirmando. Durante el proceso, hay una indagación profunda sobre lo que nos dice la proposición, así como de todas las afirmaciones que vamos haciendo y los conocimientos previos que se poseen. Si no encontramos la salida para dar otro paso, repasamos información, investigamos, volvemos al primer paso y hacemos uso de la creatividad, hasta lograr llegar a la solución.

Las demostraciones no son simples ejercicios formales, más bien son problemas que sirven de herramienta para desarrollar habilidades como: argumentación, abstracción, análisis, evaluación e interpretación. Todo lo que conlleva el proceso de realizar una demostración ayuda al desarrollo del pensamiento crítico.

Este desarrollo del pensamiento crítico no solo nos ayuda a realizar mejores demostraciones, sino que también tiene un papel fundamental en la vida en sociedad. Nos permite cuestionar si una afirmación cotidiana es verdadera. Al hacerlo, analizamos, investigamos, interpretamos y detectamos falacias, hasta llegar a nuestra propia conclusión o tomar una decisión sobre una acción que debemos emprender.

NECESIDAD DE FORMAR A LOS MAESTROS EN HACER DEMOSTRACIONES

Comenzaré mencionando que el rol del docente consiste en crear un entorno propicio para el aprendizaje, estimulando la curiosidad e interés de los estudiantes mediante la planificación de lecciones adecuadas a su nivel, el uso de métodos de enseñanza variados, y la provisión de retroalimentación constructiva. Además, el docente debe diseñar evaluaciones justas alineadas con los objetivos de aprendizaje, analizar los resultados para identificar necesidades de apoyo, y proponer actividades que fomenten el pensamiento profundo y la resolución de problemas. Es fundamental que el docente anime a los estudiantes a cuestionar y explorar ideas, se mantenga actualizado con las últimas investigaciones y tecnologías educativas, experimente con nuevas metodologías y herramientas, y enseñe a los estudiantes sobre sus derechos y responsabilidades como ciudadano.

Agregando a lo anterior el docente de matemáticas debe ayudar a los estudiantes a desarrollar su capacidad matemática, fomentando el razonamiento lógico, la comunicación y la resolución de problemas. El docente debe promover la formulación y resolución de una amplia variedad de problemas, incentivar la elaboración de conjeturas, la validación de soluciones y la demostración de las afirmaciones matemáticas. Además, debe estimular el interés y la apreciación por las matemáticas, ofrecer apoyo a quienes enfrentan dificultades, y fomentar la perseverancia y la autoconfianza al enfrentar problemas complejos.

Para lograr que los futuros docentes tengan las características mencionadas anteriormente, es necesario que vayan más allá de aplicar una fórmula, realizar operaciones concretas o quedarse únicamente con un conocimiento superficial. Es fundamental que comprendan la importancia de profundizar e indagar en el conocimiento, que tengan la iniciativa para investigar de manera autónoma y que se cuestionen sobre las afirmaciones matemáticas, lo que dice el docente, lo que leen, de las personas, etc. Es importante que los futuros docentes comprendan que las demostraciones ayudan al desarrollo del pensamiento, ya que, en un futuro, ellos estarán impartiendo matemáticas en los distintos niveles educativos

Muchos docentes en los niveles de tercer ciclo y bachillerato omiten hacer demostraciones matemáticas. Esto puede deberse a que resulta más práctico, tanto para el docente como para el estudiante, usar la fórmula en lugar de deducirla. Además, el docente puede percibir el desinterés de los estudiantes y pensar que es una pérdida de tiempo, o los programas son extensos y pueden obviar esos detalles, entre otros factores

Sin embargo, si en los profesores se crea una cultura de resolución de problemas (incluyendo las demostraciones), se puede cultivar esta herramienta desde los niveles de básica, tercer ciclo y bachillerato. De esta manera, cuando los estudiantes lleguen a la universidad, o incluso si no llegan a ella, llevarán consigo ese desarrollo junto con todos los beneficios que conlleva tener pensamiento crítico

La mayoría de los estudiantes del profesorado de matemática no traen consigo las habilidades necesarias, y es claro que realizar demostraciones es una de las etapas más complejas en el aprendizaje de la matemática. Para llegar a esa etapa, deben pasar por un desarrollo previo. Los programas de estudios de las materias de primer ciclo, como Geometría I, Aritmética y Álgebra I, conducen a realizar demostraciones desde casi el inicio de los cursos, lo cual está bien. Los docentes de educación superior estamos obligados a realizar demostraciones y lograr crear ese aprendizaje en los estudiantes.

Muchos estudiantes huyen de las demostraciones por no entenderlas, ya que les parecen muy complejas. En lugar de disfrutar del estudio, como deberían, se sienten angustiados y estresados. Al final, lo que hacen es enfocarse únicamente en la parte mecánica de los temas. Este es un gran reto tanto para los estudiantes como para los docentes. El docente debe comprender que los estudiantes no están en una etapa avanzada del aprendizaje de matemática y debe buscar métodos adecuados para comenzar a crear una cultura de resolución de problemas. Por su parte, los estudiantes deben entender que es necesario adquirir ciertas habilidades, desarrollar mejores métodos de estudio y aprender a cuestionar para avanzar en su comprensión de las matemáticas

Para finalizar, el pensamiento crítico implica la capacidad de cuestionar una verdad y tener argumentos lógicos para tomar decisiones informadas. Es importante que el desarrollo del pensamiento crítico no se limite a la materia de matemáticas; aunque las demostraciones, debido a su rigor y complejidad, nos ayudan a desarrollar esta habilidad, su aplicación va más allá de la resolución de problemas matemáticos. Este desarrollo se extiende a la sociedad, fomentando individuos que no acepten todo de manera pasiva. Por ejemplo, no deberíamos tomar como verdad absoluta cualquier afirmación que haga un político. Es crucial buscar datos, analizar, argumentar, identificar falacias, investigar y, finalmente, tomar nuestras propias decisiones. En una época en la que estamos bombardeados por información de múltiples fuentes, tener un pensamiento crítico he independiente es más importante que nunca.

REFERENCIAS

Arenas, A. C. (2007). *Pensamiento crítico Técnicas para su desarrollo* . COOPERATIVA EDITORIAL MAGISTERIO.

Solow, D. (2013). *How to read and do proofs: An introduction to mathematical thought processes.* John Wiley & Sons.